Тематический выпуск[1]

© 2024 г. **М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
«Московский физико-технический институт», Долгопрудный)

НЕХРУПКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ[2]

Рассматривается задача фильтрации для линейных систем, подверженных постоянно действующим внешним возмущениям, при этом качество фильтрации характеризуется размером ограничивающего эллипсоида, содержащего оцениваемый выход системы. Предложен регулярный подход к решению задачи нехрупкой фильтрации, состоящей в синтезе матрицы фильтра, которая выдерживает допустимые вариации своих коэффициентов. Применение концепции инвариантных эллипсоидов позволило переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств и свести ее к параметрической задаче полуопределенного программирования, легко решающейся численно.

Статья продолжает серию работ автора, посвященную вопросам фильтрации при неслучайных ограниченных внешних возмущениях и погрешностях измерений.

Ключевые слова: линейная система управления, внешние возмущения, фильтрация, нехрупкость, наблюдатель Люенбергера, линейные матричные неравенства, инвариантные эллипсоиды.

DOI: 10.31857/S0005231024060011, **EDN:** XXSIRM

1. Введение

Задача фильтрации, состоящая в оценке состояния динамической системы по измерениям, при случайных возмущениях допускает практически исчерпывающее решение с помощью фильтра Калмана. Однако во многих ситуациях предположение о случайности шумов является неоправданным: часто известно лишь, что возмущения являются ограниченными, а в остальном произвольными; в этом случае можно строить *гарантированные* оценки состояний. Такой подход восходит к работам Виценхаузена, Бертсекаса и Родеса, Швеппе [1]; в отечественных работах [2, 3] была развита эллипсоидальная техника фильтрации.

Позже, на основе техники линейных матричных неравенств [5, 6] и концепции инвариантных эллипсоидов, автором настоящей статьи совместно с

[1] Окончание тематического номера 5, 2024.

[2] Результаты исследований, представленные в разделах 4 и 5, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 21-71-30005), https://rscf.ru/project/21-71-30005/.

Б.Т. Поляком в [4] была исследована задача фильтрации для стационарных задач при ограниченных неслучайных возмущениях. При этом в классе линейных стационарных фильтров проблема оказалась полностью разрешимой: был построен оптимальный фильтр и получена равномерная оценка состояния: ее ошибка гарантированно заключена в единый эллипсоид для всех моментов времени. Эта тематика впоследствии была развита в [7–9].

С другой стороны, в систему управления неизбежно привносится неопределенность, обусловленная неточностью технической реализации регулятора или необходимостью настройки его параметров в процессе эксплуатации. В [10] было показано, что малые возмущения коэффициентов оптимального регулятора могут приводить к потере им свойства стабилизируемости. Это явление получило название *хрупкости*, впоследствии оно исследовалось в разнообразных постановках задач; см., например, [11]. В [12, 13] был предложен подход к проблеме построения т.н. *нехрупких регуляторов* – т.е. выдерживающих вариации своих параметров, – применительно к задаче подавления неслучайных ограниченных возмущений.

Настоящая статья продолжает обе эти линии исследований. В ней предлагается регулярный подход к решению задачи *нехрупкой фильтрации*, состоящей в синтезе матрицы фильтра, которая выдерживает *допустимые* вариации своих коэффициентов. Оказывается, что даже малые возмущения матрицы оптимального фильтра могут нарушать инвариантность эллипсоида (полученного в предположении ее точной реализации), содержащего невязку системы: траектории невязки могут его покидать. Целью работы является построение т.н. *нехрупкой пары*: матрицы фильтра и соответствующего – по возможности, малого – эллипсоида, содержащего невязку системы при всех допустимых возмущениях матрицы фильтра.

2. Задача фильтрации: постановка и решение

Напомним постановку и решение задачи фильтрации при ограниченных внешних возмущениях. Рассмотрим линейную непрерывную динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1 w, \quad x(0) = x_0, \\ y &= Cx + D_2 w, \\ z &= C_1 x, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}^l$, оцениваемым выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$ и внешним возмущением (шумом) $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению[3]

$$\|w(t)\| \leqslant 1 \quad \text{для всех } t \geqslant 0.$$

[3] Здесь и далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, $\mathbb{S}^n$ – пространство симметричных матриц n-го порядка, I – единичная матрица соответствующей размерности, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

Хотя природа возмущений в состоянии и выходе системы, вообще говоря, различна, удобно считать их одними и теми же, полагая что матрицы D_1 и D_2 «вырезают» из вектора w разные «куски». Пара (A, C) предполагается наблюдаемой.

Пусть состояние x системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y. Построим фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния $\widehat{x}$, включающим в себя рассогласование выхода y и его прогноза $C\widehat{x}$:

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + L(y - C\widehat{x}), \quad L \in \mathbb{R}^{n\times l}. \tag{2}$$

Структура фильтра (2) такая же, как в известном наблюдателе Люенбергера [14, 15]: он является линейным стационарным, и подлежит выбору лишь постоянная матрица L, которую будем называть *матрицей фильтра.*

Введем в рассмотрение *невязку* $e(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$; согласно (1), (2) она будет удовлетворять дифференциальному уравнению[4]

$$\dot{e} = (A - LC)e + (D_1 - LD_2)w. \tag{3}$$

Тогда точность фильтрации, состоящей в оценивании выхода z, будет характеризовать величина

$$e_1 = z - \widehat{z} = C_1(x - \widehat{x}) = C_1 e.$$

Задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) единого эллипсоида, содержащего невязку e_1.

Удобным техническим средством для решения этой задачи оказался аппарат линейных матричные неравенств и идеология инвариантных эллипсоидов [5, 6]. Напомним, что эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \quad x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leqslant 1\Big\}, \quad P \succ 0$$

называется *инвариантным* для динамической системы $\dot{x} = Ax + Dw$, если из условия $x(0) \in \mathcal{E}$ следует $x(t) \in \mathcal{E}$ для всех моментов времени $t \geqslant 0$. При этом, если $\mathcal{E}$ – инвариантный эллипсоид с матрицей P, то линейный выход $z(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^r$ динамической системы при $x(0) \in \mathcal{E}$ будет принадлежать эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \Big\{z \in \mathbb{R}^r: \quad z^{\mathrm{T}}\big(CPC^{\mathrm{T}}\big)^{-1} z \leqslant 1\Big\},$$

который называется *ограничивающим*, а при $x(0) \notin \mathcal{E}$ будет стремиться к нему.

[4] Заметим, что матрица фильтра L стабилизирует систему (3). Существование матрицы L такой, чтобы матрица $A - LC$ была устойчивой (гурвицевой), вытекает из свойства наблюдаемости исходной системы (1).

Таким образом, идеология инвариантных/ограничивающих эллипсоидов позволяет при малых уклонениях оценить равномерную по t точность фильтрации, а при больших уклонениях – асимптотическую. В рамках этого подхода при фиксированном L найдем минимальный ограничивающий эллипсоид, а затем минимизируем его по L. В качестве критерия минимальности ограничивающего эллипсоида обычно принимается *критерий следа* $f(P) = \operatorname{tr} CPC^{\mathrm{T}}$, соответствующий сумме квадратов его полуосей.

В работе [4] был установлен следующий результат.

Теорема 1. Пусть Q_*, Y_* – решение задачи

$$\min \operatorname{tr} H$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}Q + QA - YC - C^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} + \alpha Q & QD_1 - YD_2 \\ D_1^{\mathrm{T}}Q - D_2^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^{\mathrm{T}} & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \qquad Q \succ 0,$$

относительно матричных переменных $Q \in \mathbb{S}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $H \in \mathbb{S}^r$ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

Тогда матрица оптимального фильтра дается выражением

$$L_* = Q_*^{-1}Y_*,$$

а минимальный ограничивающий эллипсоид, содержащий ошибку оценки выхода z системы (1) при $x_0 = 0$, определяется матрицей

$$C_1 Q_*^{-1} C_1^{\mathrm{T}}.$$

Обратим внимание, что при фиксированном α данная задача сводится к несложно решаемой задаче полуопределенного программирования.

Замечание 1. Если известно начальное состояние $x(0) = x_0$ системы (1), то к ограничениям оптимизационной задачи в теоремы 1 добавляется

$$x_0^{\mathrm{T}} Q x_0 \leqslant 1,$$

означающее, что $e(0) = x(0) - \widehat{x}(0) = x_0 \in \mathcal{E}$.

Если же начальная точка принадлежит некоторому *эллипсоиду начальных состояний*

$$x(0) \in \mathcal{E}_0 = \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon \quad x^{\mathrm{T}} P_0^{-1} x \leqslant 1\Big\}, \quad P_0 \succ 0,$$

то в качестве дополнительного ограничения добавляется линейное матричное неравенство

$$Q \preccurlyeq P_0^{-1},$$

означающее, что $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$. В этом случае вновь имеем $e(0) = x(0) - \widehat{x}(0) = x(0) \in \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$.

Таким образом, в обоих случаях гарантируется равномерная оценка точности фильтрации.

3. Инвариантность и нехрупкость

Будем говорить, что матрица фильтра L и положительно определенная матрица $P = Q^{-1}$ образуют *нехрупкую пару* с уровнем нехрупкости γ, если для всякого Δ: $\|\Delta\| \leqslant \gamma$, возмущенная матрица фильтра $L + \Delta$ стабилизирует систему (3) и матрица P определяет ее инвариантный эллипсоид. При этом будем называть *нехрупкими* как сам фильтр, так и соответствующий ограничивающий эллипсоид, содержащий ошибку оценки выхода системы. Как и ранее, будем стремиться сделать его по возможности малым.

Сформулируем основной результат статьи.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\widetilde{Q}$, $\widetilde{Y}$ доставляют решение задаче*

$$\min \operatorname{tr} H$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}Q + QA - YC - C^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} + \alpha Q + \varepsilon C^{\mathrm{T}}C & QD_1 - YD_2 + \varepsilon C^{\mathrm{T}}D_2 & \gamma Q \\ D_1^{\mathrm{T}}Q - D_2^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} + \varepsilon D_2^{\mathrm{T}}C & -\alpha I + \varepsilon D_2^{\mathrm{T}}D_2 & 0 \\ \gamma Q & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^{\mathrm{T}} & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad Q \succ 0,$$

где оптимизация ведется по матричным переменным $Q \in \mathbb{S}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $H \in \mathbb{S}^r$, скалярной переменной ε и скалярному параметру $\alpha > 0$.

Тогда матрица

$$C_1\widetilde{Q}^{-1}C_1^{\mathrm{T}}$$

определяет нехрупкий ограничивающий эллипсоид для ошибки оценки выхода z системы (1) при $x_0 = 0$, соответствующий нехрупкой паре

$$\widetilde{L} = \widetilde{Q}^{-1}\widetilde{Y}, \qquad \widetilde{P} = \widetilde{Q}^{-1},$$

с уровнем нехрупкости γ.

Доказательство этого и последующих утверждений приведено в Приложении.

Как и ранее, задача, сформулированная в теореме 2, представляет собой параметрическую задачу полуопределенного программирования, легко решающуюся численно.

Используемый подход, основанный на построении общей квадратичной функции Ляпунова для неопределенной системы, дает лишь достаточные условия робастной асимптотической устойчивости. Не будем останавливаться подробно на анализе степени консерватизма получаемой эллипсоидальной оценки, однако примеры свидетельствуют о том, что консерватизм не очень велик.

Замечание 2. Обратим внимание, что нехрупкая матрица фильтра L робастно стабилизирует систему

$$\dot{e} = \big(A - (L+\Delta)C\big)e + \big(D_1 - (L+\Delta)D_2\big)w$$

при всех допустимых неопределенностях $\Delta\colon \|\Delta\| \leqslant \gamma$. При такой специальной структуре матрицы замкнутой системы робастная стабилизация возможна при любом γ (см., например, [6, замечание 5.2.1]). Иными словами, уровень нехрупкости γ может быть задан произвольно большим, что приведет лишь к увеличению размера нехрупкого инвариантного эллипсоида.

4. Дискретный случай

Рассмотрим линейную систему в дискретном времени

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k, \\ z_k &= C_1 x_k, \end{aligned} \tag{4}$$

с начальным условием x_0, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^l$, оцениваемым выходом $z_k \in \mathbb{R}^r$ и внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению

$$\|w_k\| \leqslant 1 \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Пара (A, C) предполагается наблюдаемой.

Как и в непрерывном случае построим фильтр, описываемый линейным разностным уравнением относительно оценки состояния $\widehat{x}_k$, включающим в себя рассогласование выхода y и его прогноза $C\widehat{x}_k$

$$\widehat{x}_{k+1} = A\widehat{x}_k + L(y_k - C\widehat{x}_k), \quad L \in \mathbb{R}^{n\times l},$$

в котором подлежит выбору постоянная матрица фильтра L.

Решение задачи нахождения минимального ограничивающего эллипсоида (определение которого остается по существу таким же, как и в непрерывном случае), содержащего ошибку оценки

$$e_{1,k} = z_k - \widehat{z}_k = C_1 e_k,$$

где $e_k = x_k - \widehat{x}_k$ – невязка системы, устанавливается следующей теоремой. Она является дискретным аналогом теоремы 1.

Т е о р е м а 3 [4, 6]. *Пусть* Q_*, Y_* – *решение задачи*

$$\min \operatorname{tr} H$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q & (QA-YC)^{\mathrm T} & 0 \\ QA-YC & -Q & QD_1-YD_2 \\ 0 & (QD_1-YD_2)^{\mathrm T} & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad \begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^{\mathrm T} & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad Q \succ 0,$$

относительно матричных переменных $Q \in \mathbb{S}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $H \in \mathbb{S}^r$ *и скалярного параметра* $0 < \alpha < 1$.

Тогда матрица оптимального фильтра дается выражением

$$L_* = Q_*^{-1} Y_*,$$

а минимальный ограничивающий эллипсоид, содержащий ошибку оценки выхода z *системы* (4) *при* $x_0 = 0$, *определяется матрицей*

$$C_1 Q_*^{-1} C_1^{\mathrm T}.$$

Определение нехрупкой пары остается таким же, как и в непрерывном случае; ее нахождение производится в соответствии со следующим результатом.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\widetilde{Q}$, $\widetilde{Y}$ *доставляют решение задаче*

$$\min \operatorname{tr} H$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q + \varepsilon C^{\mathrm T} C & (QA-YC)^{\mathrm T} & \varepsilon C^{\mathrm T} D_2 & 0 \\ QA-YC & -Q & QD_1-YD_2 & \gamma Q \\ \varepsilon D_2^{\mathrm T} C & (QD_1-YD_2)^{\mathrm T} & -(1-\alpha)I + \varepsilon D_2^{\mathrm T} D_2 & 0 \\ 0 & \gamma Q & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^{\mathrm T} & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad Q \succ 0,$$

где оптимизация ведется по матричным переменным $Q \in \mathbb{S}^n$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $H \in \mathbb{S}^r$, *скалярной переменной* ε *и скалярному параметру* $0 < \alpha < 1$.

Тогда матрица

$$C_1 \widetilde{Q}^{-1} C_1^{\mathrm T}$$

определяет нехрупкий ограничивающий эллипсоид для ошибки оценки выхода z_k *системы* (4) *при* $x_0 = 0$, *соответствующий нехрупкой паре*

$$\widetilde{L} = \widetilde{Q}^{-1} \widetilde{Y}, \qquad \widetilde{P} = \widetilde{Q}^{-1},$$

с уровнем нехрупкости γ.

Как и в непрерывном случае, оптимизационная задача из теоремы 4 представляет собой несложную параметрическую задачу полуопределенного программирования.

Обратим внимание, что замечание 2 сохраняет свою силу и в дискретном случае. А именно, робастная стабилизация системы

$$e_{k+1} = \big(A - (L+\Delta)C\big)e_k + \big(D_1 - (L+\Delta)D_2\big)w_k$$

при всех допустимых неопределенностях $\Delta\colon \|\Delta\| \leqslant \gamma$ возможна при любом значении уровня нехрупкости γ.

5. Пример

Продемонстрируем предложенный подход к фильтрации ограниченных внешних возмущений с использованием инвариантных эллипсоидов на примере задачи оценивания состояния двойного пружинного маятника (см. рис. 1).

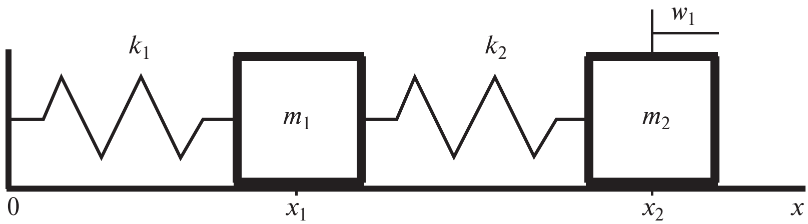

Рис. 1. Двойной пружинный маятник.

Пусть x_1, x_2 – координаты левого и правого тела, а v_1, v_2 – их скорости, причем на правое тело воздействует внешнее возмущение w_1. Непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= v_1,\\
\dot{x}_2 &= v_2,\\
\dot{v}_1 &= -\frac{k_1+k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2,\\
\dot{v}_2 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_2}w_1,
\end{aligned}$$

где k_1, k_2 – коэффициенты жесткости левой и правой пружины, m_1, m_2 – массы левого и правого тела,

Взяв в качестве вектора состояния

$$x = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ v_1\\ v_2 \end{pmatrix},$$

в качестве наблюдаемого выхода – зашумленный вектор координат

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0{,}1 \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

а в качестве оцениваемого – вектор скоростей

$$z = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

приходим к системе вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1+k_2}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & -\dfrac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \|w\| \leqslant 1.$$

Пусть далее параметры системы единичны: $k_1 = k_2 = m_1 = m_2 = 1$, пусть также $P_0 = 0{,}15I$.

Сначала в соответствии с теоремой 1 найдем решение задачи без учета требования нехрупкости. Получаем матрицу фильтра

$$L_* = \begin{pmatrix} 1{,}4808 & 0{,}2309 \\ -0{,}1641 & 2{,}1590 \\ -0{,}5457 & 1{,}0867 \\ 0{,}6232 & 3{,}4354 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$Q_* = \begin{pmatrix} 5{,}0166 & -0{,}1455 & -2{,}0847 & -0{,}0184 \\ -0{,}1455 & 6{,}1854 & -0{,}1544 & -1{,}5832 \\ -2{,}0847 & -0{,}1544 & 4{,}0310 & 0{,}0762 \\ -0{,}0184 & -1{,}5832 & 0{,}0762 & 1{,}3265 \end{pmatrix},$$

которым соответствует минимальный ограничивающий эллипс $\mathcal{E}_*$ с матрицей

$$C_1 Q_*^{-1} C_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0{,}3167 & -0{,}0046 \\ -0{,}0046 & 1{,}0863 \end{pmatrix},$$

содержащий ошибку e_1 оценки выхода z.

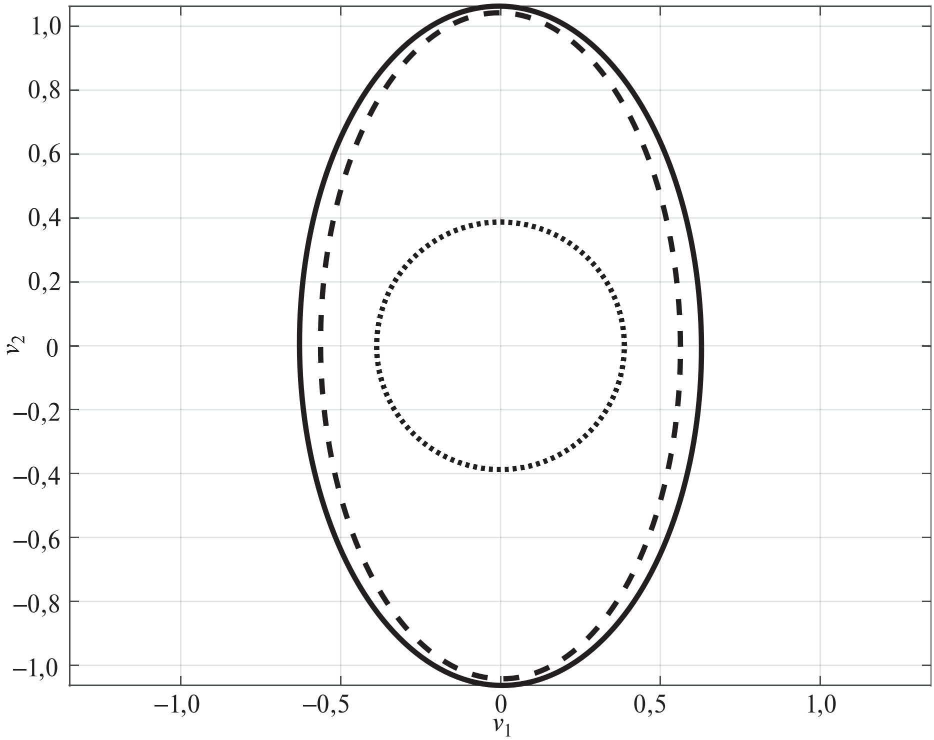

Рис. 2. Ограничивающие эллипсы.

Теперь зададимся уровнем нехрупкости

$$\gamma = 2.$$

Решив оптимизационную задачу из теоремы 2, находим матрицу фильтра

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} 23{,}3910 & 0{,}9878 \\ 0{,}9883 & 21{,}9974 \\ 14{,}5498 & 1{,}0207 \\ 0{,}9240 & 26{,}6793 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 5{,}3807 & -0{,}1112 & -2{,}0697 & -0{,}0284 \\ -0{,}1112 & 6{,}2215 & -0{,}1462 & -1{,}5363 \\ -2{,}0697 & -0{,}1462 & 3{,}3329 & 0{,}0697 \\ -0{,}0284 & -1{,}5363 & 0{,}0697 & 1{,}2650 \end{pmatrix}.$$

В результате получена нехрупкая пара $(\widetilde{L}, \widetilde{P})$, где

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0{,}2446 & 0{,}0103 & 0{,}1522 & 0{,}0097 \\ 0{,}0103 & 0{,}2301 & 0{,}0107 & 0{,}2790 \\ 0{,}1522 & 0{,}0107 & 0{,}3951 & -0{,}0054 \\ 0{,}0097 & 0{,}2790 & -0{,}0054 & 1{,}1299 \end{pmatrix},$$

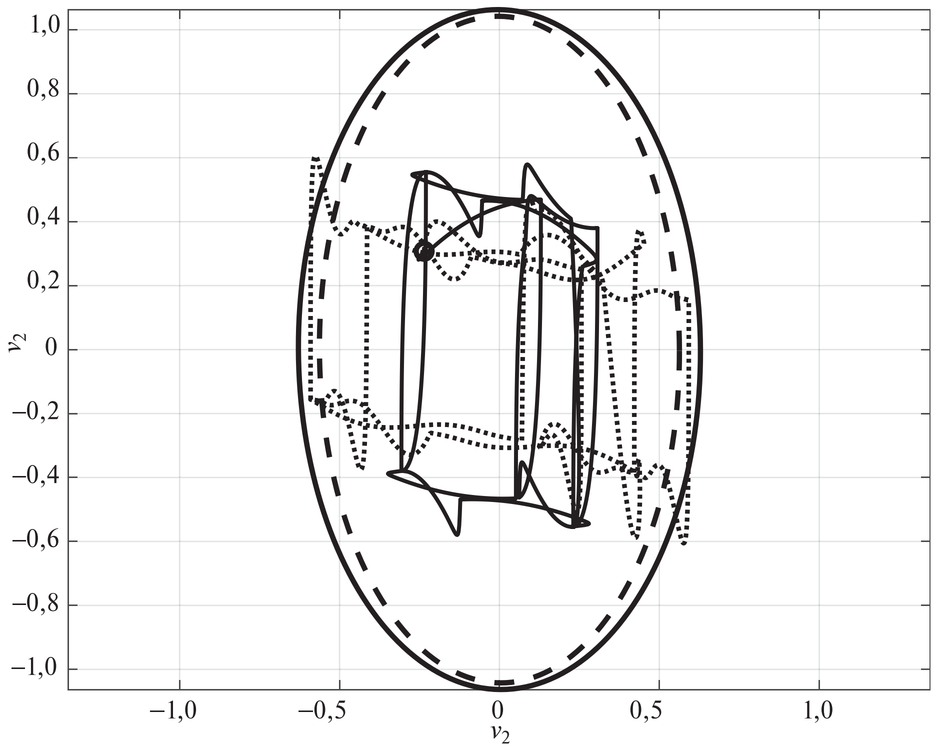

Рис. 3. Траектории невязок.

которой соответствует нехрупкий ограничивающий эллипс $\widetilde{\mathcal{E}}$ с матрицей

$$C_1\widetilde{Q}^{-1}C_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0{,}3951 & -0{,}0054 \\ -0{,}0054 & 1{,}1299 \end{pmatrix},$$

содержащий ошибку e_1 оценки выхода z. Обратим внимание, что размеры (по критерию следа) эллипсов $\widetilde{\mathcal{E}}$ и $\mathcal{E}_*$ отличаются менее, чем на 9%.

На рис. 2 сплошной линией изображен нехрупкий ограничивающий эллипс $\widetilde{\mathcal{E}}$, а пунктиром – минимальный ограничивающий эллипс $\mathcal{E}_*$. Точечной линией показана проекция эллипсоида начальных состояний на плоскость (v_1, v_2), представляющая собой эллипс с матрицей $C_1P_0C_1^{\mathrm{T}}$ (см. замечание 1).

Теперь подвергнем оптимальную матрицу фильтра L_* возмущению

$$\Delta = \begin{pmatrix} -0{,}0171 & 0{,}1641 \\ -0{,}0714 & -0{,}4232 \\ -0{,}9640 & -0{,}1353 \\ 0{,}2461 & -0{,}7643 \end{pmatrix}, \quad \|\Delta\| = 1.$$

На рис. 3 точечной линией показана траектория невязки e_1 при некотором начальном условии $x_0 \in \mathcal{E}_0$ (его проекция на плоскость (v_1, v_2) показана кружком), некотором допустимом внешнем возмущении w и матрице фильтра $L_* + \Delta$. Как видно, траектория покидает не только минимальный ограничивающий эллипс $\mathcal{E}_*$, но и нехрупкий ограничивающий эллипс $\widetilde{\mathcal{E}}$ – при том, что размах неопределенности в матрице фильтра вдвое меньше уровня нехрупкости $\gamma = 2$.

Для сравнения подвергнем возмущению вдвое большего размаха ($\|2\Delta\| = 2 = \gamma$) нехрупкую матрицу фильтра $\widetilde{L}$. Траектория невязки e_1 системы при том же начальном условии и внешнем возмущении показана на рис. 3 сплошной линией; как видно, ее поведение по отношению к ограничивающему эллипсу принципиально иное.

Вычисления проводились в среде Matlab с использованием пакета `cvx` [17].

6. Заключение

Предложен простой и универсальный подход к решению задачи нехрупкой фильтрации произвольных ограниченных внешних возмущений с использованием наблюдателя. Подход основан на методе инвариантных эллипсоидов; применение этой концепции позволило переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств и свести ее к параметрической задаче полуопределенного программирования, легко решающейся численно. Эффективность метода продемонстрирована на примере двойного пружинного маятника.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Невязка e системы (1) для возмущенной матрицы фильтра $L + \Delta$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = \big(A - (L+\Delta)C\big)e + \big(D_1 - (L+\Delta)D_2\big)w. \tag{П.1}$$

Согласно [6], условие инвариантности эллипсоида с матрицей $P = Q^{-1} \succ 0$ для динамической системы (П.1) эквивалентно существованию $\alpha(\Delta) > 0$ такого, что ЛМН

$$\begin{pmatrix} \big(A-(L+\Delta)C\big)^{\mathrm{T}}Q + Q\big(A-(L+\Delta)C\big) + \alpha(\Delta)Q & Q\big(D_1-(L+\Delta)D_2\big) \\ \big(D_1-(L+\Delta)D_2\big)^{\mathrm{T}}Q & -\alpha(\Delta)I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0 \tag{П.2}$$

выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности Δ: $\|\Delta\| \leqslant \gamma$.

Будем предполагать, что существует такое $\alpha > 0$, что неравенство (П.2) выполняется при всех допустимых Δ; тогда (П.2) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} (A-LC)^{\mathrm{T}}Q + Q(A-LC) + \alpha Q & Q(D_1 - LD_2) \\ (D_1 - LD_2)^{\mathrm{T}}Q & -\alpha I \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} -C & -D_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C^{\mathrm{T}} \\ -D_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \Delta^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} Q & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

По лемме Питерсена [16] (см. также [6, следствие 2.2.6]) это неравенство выполнено тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\begin{pmatrix} (A-LC)^{\mathrm{T}}Q + Q(A-LC) + \alpha Q & Q(D_1 - LD_2) \\ (D_1 - LD_2)^{\mathrm{T}}Q & -\alpha I \end{pmatrix} +$$

$$+\varepsilon \begin{pmatrix} -C^{\mathrm{T}} \\ -D_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & -D_2 \end{pmatrix} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon} \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} (A-LC)^{\mathrm{T}}Q + Q(A-LC) + \alpha Q + \varepsilon C^{\mathrm{T}}C & Q(D_1 - LD_2) + \varepsilon C^{\mathrm{T}}D_2 & \gamma Q \\ (D_1 - LD_2)^{\mathrm{T}}Q + \varepsilon D_2^{\mathrm{T}}C & -\alpha I + \varepsilon D_2^{\mathrm{T}}D_2 & 0 \\ \gamma Q & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Вводя новую матричную переменную $Y = QL$, преобразуем последнее соотношение к линейному виду

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}Q + QA - YC - C^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} + \alpha Q + \varepsilon C^{\mathrm{T}}C & QD_1 - YD_2 + \varepsilon C^{\mathrm{T}}D_2 & \gamma Q \\ D_1^{\mathrm{T}}Q - D_2^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} + \varepsilon D_2^{\mathrm{T}}C & -\alpha I + \varepsilon D_2^{\mathrm{T}}D_2 & 0 \\ \gamma Q & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0. \tag{П.3}$$

Поскольку $e_1 = C_1 e$, то невязка e_1 содержится в ограничивающем эллипсоиде с матрицей $C_1 Q^{-1} C_1^{\mathrm{T}}$. Таким образом, приходим к задаче

$$\min \operatorname{tr} C_1 Q^{-1} C_1^{\mathrm{T}} \quad \text{при ограничениях (П.3) и } Q \succ 0.$$

Согласно [6], эта задача эквивалентна задаче минимизации $\operatorname{tr} H$ при ограничениях (П.3) и

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^{\mathrm{T}} & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где $H \in \mathbb{S}^r$ – вспомогательная матричная переменная. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. Невязка системы (4) для возмущенной матрицы фильтра $L + \Delta$ будет удовлетворять разностному уравнению

$$e_{k+1} = \big(A - (L+\Delta)C\big)e_k + \big(D_1 - (L+\Delta)D_2\big)w_k. \tag{П.4}$$

Согласно [6], условие инвариантности эллипсоида с матрицей $P = Q^{-1} \succ 0$ для динамической системы (П.4) эквивалентно существованию $\alpha(\Delta) > 0$ такого, что ЛМН

$$\begin{pmatrix} -\alpha(\Delta)Q & \big(A - (L+\Delta)C\big)^{\mathrm{T}}Q & 0 \\ Q\big(A - (L+\Delta)C\big) & -Q & Q\big(D_1 - (L+\Delta)D_2\big) \\ 0 & \big(D_1 - (L+\Delta)D_2\big)^{\mathrm{T}}Q & -\big(1 - \alpha(\Delta)\big)I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0 \tag{П.5}$$

выполняется при всех допустимых значениях матричной неопределенности Δ: $\|\Delta\| \leqslant \gamma$.

Будем предполагать, что существует такое $\alpha > 0$, что неравенство (П.5) выполняется при всех допустимых Δ; тогда перепишем его в виде

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q & (A-LC)^{\mathrm{T}}Q & 0 \\ Q(A-LC) & -Q & Q(D_1-LD_2) \\ 0 & (D_1-LD_2)^{\mathrm{T}}Q & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} -C & 0 & -D_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ -D_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \Delta^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & Q & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Вновь воспользовавшись леммой Питерсена заключаем, что это неравенство выполнено тогда и только тогда, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q & (A-LC)^{\mathrm{T}}Q & 0 \\ Q(A-LC) & -Q & Q(D_1-LD_2) \\ 0 & (D_1-LD_2)^{\mathrm{T}}Q & -(1-\alpha)I \end{pmatrix} +$$

$$+ \varepsilon \begin{pmatrix} -C^{\mathrm{T}} \\ 0 \\ -D_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & 0 & -D_2 \end{pmatrix} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Q & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q + \varepsilon C^{\mathrm{T}}C & (A-LC)^{\mathrm{T}}Q & \varepsilon C^{\mathrm{T}}D_2 & 0 \\ Q(A-LC) & -Q & Q(D_1-LD_2) & \gamma Q \\ \varepsilon D_2^{\mathrm{T}}C & (D_1-LD_2)^{\mathrm{T}}Q & -(1-\alpha)I + \varepsilon D_2^{\mathrm{T}}D_2 & 0 \\ 0 & \gamma Q & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Вводя новую матричную переменную $Y = QL$, преобразуем последнее соотношение к линейному виду

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q + \varepsilon C^{\mathrm{T}}C & (QA-YC)^{\mathrm{T}} & \varepsilon C^{\mathrm{T}}D_2 & 0 \\ QA-YC & -Q & QD_1-YD_2 & \gamma Q \\ \varepsilon D_2^{\mathrm{T}}C & (QD_1-YD_2)^{\mathrm{T}} & -(1-\alpha)I + \varepsilon D_2^{\mathrm{T}}D_2 & 0 \\ 0 & \gamma Q & 0 & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0. \tag{П.6}$$

Аналогично непрерывному случаю, приходим к задаче

$$\min \operatorname{tr} C_1 Q^{-1} C_1^{\mathrm{T}} \quad \text{при ограничениях (П.6) и } Q \succ 0,$$

эквивалентной задаче минимизации $\operatorname{tr} H$ при ограничениях (П.6) и

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^{\mathrm{T}} & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где $H \in \mathbb{S}^r$ – вспомогательная матричная переменная. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schweppe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. N.J.: Prentice Hall, 1973.
2. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
3. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
4. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Доклады Академии наук. 2008. Т. 418. № 6. С. 749–753.

   Polyak B.T., Topunov M.V. Filtering under Nonrandom Disturbances: The Method of Invariant Ellipsoids // Doklady Mathematics. 2008. V. 77. No. 1. P. 158–162.
5. *Boyd S., El Ghaoui L., Ferron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
7. *Хлебников М.В.* Робастная фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2009. № 1. С. 147–161.

   Khlebnikov M.V. Robust Filtering under Nonrandom Disturbances: The Invariant Ellipsoid Approach // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 1. P. 133–146.
8. *Хлебников М.В.* Разреженная фильтрация при ограниченных внешних возмущениях // АиТ. 2022. № 2. С. 35–50.

   Khlebnikov M.V. Sparse Filtering under Bounded Exogenous Disturbances // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 2. P. 191–203.
9. *Хлебников М.В.* Сравнение гарантирующего и калмановского фильтров // АиТ. 2023. № 4. С. 64–95.

   Khlebnikov M.V. A Comparison of Guaranteeing and Kalman Filters // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 4. P. 434–459.
10. *Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* Robust, Fragile, or Optimal? // IEEE Trans. Autom. Control. 1997. V. 42. No. 8. P. 1098–1105.
11. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез грубых регуляторов на основе линейных матричных неравенств // АиТ. 2006. № 12. С. 154–162.

    Balandin D.V., Kogan M.M. Synthesis of nonfragile controllers on the basis of linear matrix inequalities // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 12. P. 2002–2009.
12. *Хлебников М.В.* Нехрупкий регулятор для подавления внешних возмущений // АиТ. 2010. № 4. С. 106–119.

    Khlebnikov M.V. A Nonfragile Controller for Suppressing Exogenous Disturbances // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 4. P. 640–653.
13. *Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Инвариантность и нехрупкость при подавлении внешних возмущений // АиТ. 2015. № 5. С. 175–190.

    Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Invariance and Nonfragility in the Rejection of Exogenous Disturbances // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 5. P. 872–884.
14. *Luenberger D.G.* Observing the State of a Linear System // IEEE Transactions on Military Electronics. 1964. V. 8. P. 74–80.

15. *Luenberger D.G.* An Introduction to Observers // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 35. P. 596–602.

16. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. Iss. 4. P. 351–357.

17. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.2. URL http://cvxr.com/cvx

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024